

補助事業番号 2024M-370

補助事業名 2024年度 数式処理によるロバストかつ効率的なロボットの動作計画
補助事業

補助事業者名 筑波大学 数理物質系 数学域 照井 章

1 研究の概要

本研究では、数式処理(計算機代数)によるロボット、特にマニピュレータ(腕型ロボット:図 1)の動作計画を対象とした。

数式処理による動作計画は、大域的な計算により、ロボットの動作前に動作計画の実行可能性を厳密に判定できるというロバスト性を有する。一方で、数値計算による局所的手法と比較すると、1) 計算コストの増加、2) 座標や経路に対する浮動小数の直接的な適用が困難、といった課題がある。

本研究では、包括的グレブナー基底系や限量子消去法といった数式処理の理論を応用し、マニピュレータに対してロバストかつ効率的な動作計画手法を開発した。



図 1 6 自由度マニピュレータの例 (Elephant Robotics 社 myCobot 280)

2 研究の目的と背景

近年のロボット制御技術は、機械学習や各種センサ技術の発展により、環境認識や対話的な操作能力が大きく向上している。一方で、ロボットの動作計画に用いられる逆運動学の解法においては、現在も解析的に解けないケースも多く、数値計算による局所解に依存する手法が一般的である。

数式処理(計算機代数)は計算機上で多項式などの数式を厳密に扱う理論や技術であり、1980年代以降、特に多変数多項式環のイデアルのグレブナー基底の研究が発展した。逆運動学問題を連立代数方程式として定式化し、グレブナー基底を用いて解くことで(図 2)、動作前にロボットの実行可能性を大域的かつ厳密に判定できるという利点がある。

$$\begin{array}{l} \text{与えられた} \\ \text{連立代数方程式} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} f_1(x, y, z, w) = 0 \\ f_2(x, y, z, w) = 0 \\ f_3(x, y, z, w) = 0 \\ f_4(x, y, z, w) = 0 \end{array} \right.$$

↓

$$\begin{array}{l} \text{グレブナー基底の} \\ \text{計算によって} \\ \text{変換された} \\ \text{連立代数方程式} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} g_1(x) = 0 \\ g_2(x, y) = 0 \\ g_3(x, y, w) = 0 \\ g_4(x, y, z, w) = 0 \end{array} \right.$$

図 2 グレブナー基底による連立代数方程式の三角化

しかしながら、この手法には以下のような課題が存在する。

1. 経路計画において逆運動学問題を繰り返し解く必要があるが、そのたびにグレブナー基底の計算が必要になり、数値解法と比較して計算コストが高くなる可能性がある。
2. ロボットの座標や経路は通常、浮動小数で与えられるが、数式処理では整数や有理数などの厳密な係数を前提とするため、現実のデータとの整合性に課題が生ずる。

このような課題に対し、本研究では、包括的グレブナー基底系や限量子消去法といった先進的な数式処理の理論を応用することで、これらの課題に対処する。具体的には、グレブナー基底に

よる大域的な解法の利点を生かしつつ、計算コストを抑制し、浮動小数データを含む入力に対する解の存在判定(保証)を可能にすることで、ロバストかつ効率的なロボットの動作計画手法の開発を目的とする。

3 研究内容

(1) 曲線を含む経路に対する経路計画問題の求解に関する研究

本研究では、マニピュレータ(腕型ロボット)のエンドエフェクタ(先端部)が障害物を避けつつ、始点から終点まで移動する経路を生成する手法として、ベジエ曲線を用いた経路計画を検討した。具体的には、障害物を包含する球面と交差せず、かつマニピュレータの可動範囲内に収まるような経路を与える関数の導出を目指した。

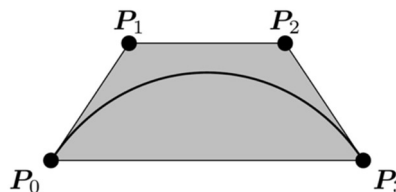


図 3 ベジエ曲線の凸包性. 曲線全体が制御点 P_0, P_1, P_2, P_3 の凸包内に含まれる.

これまで補助事業者が主宰する研究グループでは、スプライン曲線を用いた経路計画手法を提案していたが、補間点をマニピュレータの実行可能領域内に設定しても、構成された経路がその実行可能領域を逸脱する場合があった。本研究では、ベジエ曲線が持つ凸包性(曲線のすべての部分が制御点の凸包に収まる性質: 図 3)を活用することで、制御点を実行可能領域内に設定すれば、生成される曲線も常にその実行可能領域内に収まることを確認した。これにより、従来手法の課題を解決し、より安全かつ確実な経路計画が可能になった。

(2) 6 自由度のマニピュレータに対する逆運動学問題、経路計画問題に関する研究

本研究では、まずエンドエフェクタの姿勢を固定した条件下での逆運動学問題を定式化し、問題を表す連立代数方程式に対して包括的グレブナー基底系を計算することで、隣接する2つのジョイントの回転軸が1点で交わるという条件の下で解析的な解法を導出した。次に、姿勢を固定しない一般の逆運動学問題に対しても、マニピュレータが特殊な姿勢を取らない条件下で同様に包括的グレブナー基底系を計算し、解法を得た(図 4)。これにより、6 自由度マニピュレータに対する逆運動学の適用範囲を拡大した。

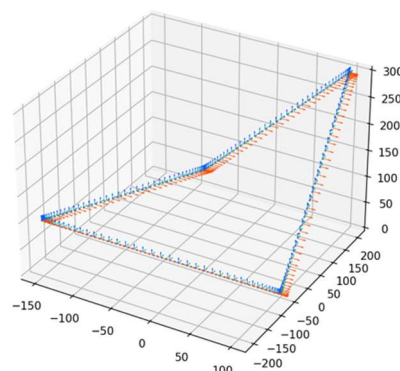


図 4 エンドエフェクタの姿勢を固定した軌道計画問題の解

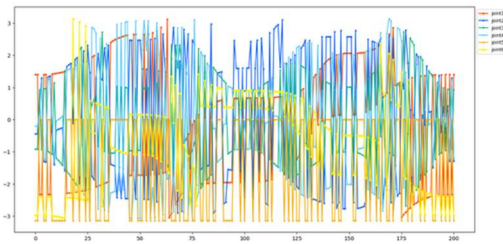


図 5 経路最適化前のジョイントの動作

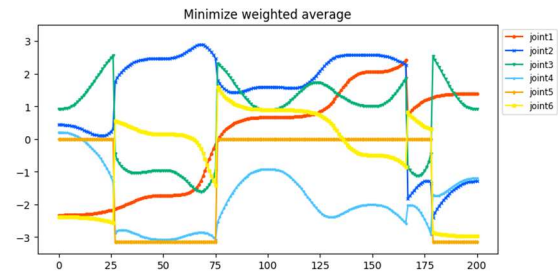


図 6 経路最適化により滑らかになったジョイントの動作

また、軌道計画および経路最適化においては、与えられたエンドエフェクタの姿勢に対して軌道計画解の存在を判定した上で、軌道上の各点における逆運動学解の中からジョイント動作がより滑らかになる解を選択することで、効率的な経路計画を実現した(図 5, 図 6)。

(3)ミニマックス多項式近似による推定問題の解法の研究

本研究では、ある物理現象に関する量を推定する問題において、非線形関数を含む推定方程式をミニマックス多項式(図 7)で近似することで、問題を連立代数方程式へと変換した。変換後の方程式系は、グレブナー基底などの数式処理手法を用いて解かれ、物理量の推定に活用される。本手法の検討は、マニピュレータのロバストな動作計画に用いられるグレブナー基底計算の応用可能性を評価する一環として実施されたものである。

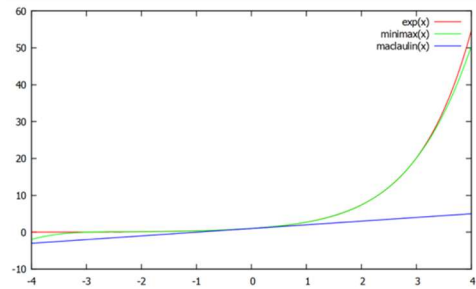


図 7 関数 $\text{Exp}(x)$ のマクローリン展開およびミニマックス多項式による近似の比較

本手法の応用として、マイクロフォンアレイを用いた話者方向推定問題に対し、ミニマックス多項式近似を用いて連立代数方程式を導出し、それを解くことで話者の方向を推定する手法を検討した。本手法により、複雑な連立方程式をより単純な代数方程式に帰着させ、効率的に解くことが可能であることを示した。

(4)小惑星探査ローバの位置推定手法および誤差評価の研究

本研究では、小惑星探査ローバの群ロボットが互いに電波を送受信し、その電波強度に基づいて相対位置を推定する手法を検討した(図 8)。位置推定は電波の伝搬モデルに基づく非線形連立方程式を解くことで実現される。本手法の検討は、マニピュレータのロバストな動作計画に用いられるグレブナー基底計算などの代数的手法の応用可能性を評価する一環として実施された。

先行研究では、ローバの大きさを無視することでモデルを簡素化していたが、本研究ではこの近似による誤差の影響を評価した。具体的には、ローバの大きさを考慮した新たな方程式を導出し、係数に含まれる誤差の大きさを見積もった上で、それが推定結果に与える影響を解析した。その結果、ローバの大きさを無視することによって生じる誤差が位置推定制度に与える影響を明確に示すことができた。本研究は、代数的手法の実用性を評価するとともに、将来の小惑星探査ミッションにおける高精度な位置推定技術の確立に貢献するものである。

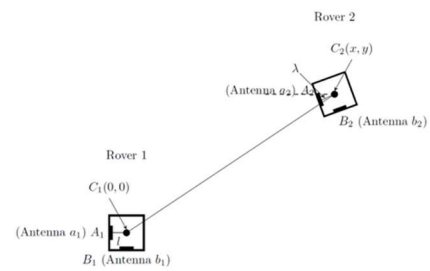


図 8 小惑星探査ローバの位置推定

4 本研究が実社会にどう活かされるか—展望

マニピュレータの動作計画において、あらかじめ障害物を回避する経路を設計するなど、理論的厳密性を保ちつつ効率的に計画を立てることで、ミッションクリティカルな用途にも対応可能な、安全かつ高効率な制御系の構築が期待される。

5 教歴・研究歴の流れにおける今回研究の位置づけ

補助事業者は、数式処理の数式・数値融合計算の研究に従事し、数式処理と数値計算の境界領域で豊富な経験を有している。また、人工知能プロジェクト「ロボットは東大に入れるか」に参加し、包括的グレブナー基底系や限量子消去法の研究にも従事した。近年ではロボット工学の研究者と連携し、数式処理のロボット工学への応用や、ロボット工学における数理的問題の解法に取り組んでいる。これらの経験と知見を踏まえ、今回の研究は補助事業者の専門性を集約し、これまでの研究を統合したものと位置付けられる。

6 本研究にかかわる知財・発表論文等

A. 査読付論文(4件)

1. Y. Shirato, N. Oka, A. Terui, M. Mikawa. An Optimized Path Planning of Manipulator with Spline Curves Using Real Quantifier Elimination Based on Comprehensive Gröbner Systems. Proceedings of the 10th International Symposium on Symbolic Computation in Software Science, Works in Progress Workshop, 2024, 105–112.
2. T. Okazaki, A. Terui, M. Mikawa. Towards Trajectory Planning for a 6-Degree-of-Freedom Robot Manipulator Considering the Orientation of the End-effector Using Computer Algebra. Proceedings of the 10th International Symposium on Symbolic Computation in Software Science, Works in Progress Workshop, 2024, 84–91.
3. K. Kuramochi, A. Terui, M. Mikawa. Solving Estimation Problems Using Minimax

Polynomials and Gröbner Bases. Proceedings of the 10th International Symposium on Symbolic Computation in Software Science, Works in Progress Workshop, 2024, 57–62.

4. R. Hatakeyama, A. Terui, M. Mikawa. Towards Trajectory Planning of a Robot Manipulator with Computer Algebra using Bézier Curves for Obstacle Avoidance. Proceedings of the 10th International Symposium on Symbolic Computation in Software Science, Works in Progress Workshop, 2024, 21– 27.

B. 査読無論文(4件)

1. 岡 夏未, 白戸祐輔, 照井 章, 三河正彦. 包括的グレブナー基底系計算に基づく限量子消去を用いたロボットの逆運動学計算および経路計画の最適化. 数式処理, Vol. 31, No. 1, 16–19, 2025.
2. 岡崎拓夢, 照井 章, 三河正彦. 包括的Gröbner基底系を用いた6自由度ロボットマニピュレータの逆運動学問題の解法. 数理解析研究所講究録 “Computer Algebra – Foundations and Applications”, 京都大学数理解析研究所, 2025, 印刷中, 12p.
3. 畠山 諒, 照井 章, 三河正彦. Bézier曲線を用いたマニピュレータの軌道計画. 数理解析研究所講究録 “Computer Algebra – Foundations and Applications”, 京都大学数理解析研究所, 2025, 印刷中, 13p.
4. 倉持研汰, 照井 章, 三河正彦. 連立方程式の求解と遺伝的アルゴリズムを組み合わせた小惑星探査ローバの位置決定問題の解法. 数理解析研究所講究録 “Computer Algebra – Foundations and Applications”, 京都大学数理解析研究所, 2025, 印刷中, 13p.

C. 口頭発表 (国際会議・査読有、5件)

1. Y. Shirato, N. Oka, A. Terui, M. Mikawa. Inverse Kinematics and Optimized Path Planning of Manipulator Using Real Quantifier Elimination Based on Comprehensive Gröbner Systems. The 26th International Workshop on Computer Algebra in Scientific Computing (CASC 2024). Rennes, France, September 5, 2024.
2. Y. Shirato, N. Oka, A. Terui, M. Mikawa. An Optimized Path Planning of Manipulator with Spline Curves Using Real Quantifier Elimination Based on Comprehensive Gröbner Systems. The 10th International Symposium on Symbolic Computation in Software Science, Works in Progress Workshop, Tokyo, Japan, August 30, 2024.
3. T. Okazaki, A. Terui, M. Mikawa. Towards Trajectory Planning for a 6-Degree-of-

Freedom Robot Manipulator Considering the Orientation of the End-effector Using Computer Algebra. The 10th International Symposium on Symbolic Computation in Software Science, Works in Progress Workshop, Tokyo, Japan, August 30, 2024.

4. K. Kuramochi, A. Terui, M. Mikawa. Solving Estimation Problems Using Minimax Polynomials and Gröbner Bases. Proceedings of the 10th International Symposium on Symbolic Computation in Software Science, Works in Progress Workshop, Tokyo, Japan, August 28, 2024.
5. R. Hatakeyama, A. Terui, M. Mikawa. Towards Trajectory Planning of a Robot Manipulator with Computer Algebra using Bézier Curves for Obstacle Avoidance. The 10th International Symposium on Symbolic Computation in Software Science, Works in Progress Workshop, Tokyo, Japan, August 28, 2024.

D. 口頭発表（国内研究集会・招待、3件）

1. 岡崎拓夢. 包括的Gröbner基底計算を用いた6自由度ロボットマニピュレータの軌道計画問題と経路最適化問題. 九州大学IMI共同利用・短期共同研究「記号計算の高速化と産業課題解決への応用2」. 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所, 2024年11月11日.
2. 畠山 諒. Bézier曲線を用いたマニピュレータの軌道計画. 九州大学IMI共同利用・短期共同研究「記号計算の高速化と産業課題解決への応用2」. 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所, 2024年11月11日.
3. 倉持研汰. 連立方程式の求解と遺伝的アルゴリズムを組み合わせた小惑星探査ローバーの位置決定問題の解法. 九州大学IMI共同利用・短期共同研究「記号計算の高速化と産業課題解決への応用2」. 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所, 2024年11月12日.

E. 口頭発表（国内研究集会・査読無、5件）

1. 岡 夏未, 白戸祐輔, 照井 章, 三河正彦. 包括的グレブナー基底系計算に基づく限量子消去を用いたロボットの逆運動学計算および経路計画の最適化. 日本数式処理学会第33回大会, 愛媛大学, 2024年6月15日.
2. 岡崎拓夢, 照井 章, 三河正彦. 包括的Gröbner基底系を用いた6自由度ロボットマニピュレータの逆運動学問題の解法. RIMS共同研究“Computer Algebra – Foundations and Applications”, 京都大学数理解析研究所, 2025年12月19日.
3. 畠山 諒, 照井 章, 三河正彦. Bézier曲線を用いたマニピュレータの軌道計画. RIMS共

同研究 “Computer Algebra – Foundations and Applications” , 京都大学数理解析研究所, 2025年12月19日.

4. 倉持研汰, 照井 章, 三河正彦. 連立方程式の求解と遺伝的アルゴリズムを組み合わせた小惑星探査ローバの位置決定問題の解法. RIMS共同研究 “Computer Algebra – Foundations and Applications” , 京都大学数理解析研究所, 2025年12月19日.
5. 岡崎拓夢, 照井 章, 三河正彦. 数式処理による6自由度ロボットマニピュレータの軌道計画問題および経路最適化問題. Risa/Asir Conference 2025, 金沢大学, 2025年3月26日.

7 補助事業に係る成果物

(1)補助事業により作成したもの

査読付論文のオンラインプロシーディングス <https://ceur-ws.org/Vol-3754/>

(2)(1)以外で当事業において作成したもの

該当項目なし

8 事業内容についての問い合わせ先

所属機関名: 筑波大学 数理物質系 数学域

(つくばダイガク スウリブッシツケイ スウガクイキ)

住 所: 〒305-8571

茨城県つくば市天王台1-1-1

担 当 者: 准教授 照井 章 (テルイ アキラ)

担 当 部 署: 数理物質系 数学域 (スウリブッシツケイ スウガクイキ)

E - m a i l : terui@math.tsukuba.ac.jp

U R L : <https://www.math.tsukuba.ac.jp/~terui/>